Контрольная работа по математическому анализу 1 курс тема:"Интегралы"

Вычислить интегралы 1)-7). Результаты 1)-6) проверить дифференцированием.

$$1)\int(3x^2-2x+5)dx;\qquad 2)\int\frac{2x^2+x-1}{x^3}dx;$$

$$3)\int 3^t5^tdt;\qquad 4)\int\frac{e^x}{3+4e^x}dx;$$

$$5)\int\frac{lnx}{x^3}dx;\qquad 6)\int\sin^2 3xdx;$$

$$7)\int\limits_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx.$$

РЕШЕНИЕ:

1).В силу неприрывности подинтегральных функций предел суммы можно представить, как сумму интегралов

$$\int(3x^2-2x+5)dx=\int 3x^2dx-2\int xdx+5\int dx=$$

используя, табличные интегралы получим

$$=x^3-x^2+5x+C;$$

Проверка:

$$(x^3-x^2+5x+C)'=3x^2-2x+5.$$

2).В силу неприрывности подинтегральных функций предел суммы можно представить, как сумму интегралов

$$\int\frac{2x^2+x-1}{x^3}dx=\int\frac{2x^2}{x^3}dx+\int\frac{x}{x^3}dx-\int\frac{1}{x^3}dx=$$

$$=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{x^3}dx=2ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C;$$

Проверка:

$$(2ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C)' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

$$3).\int 3^t 5^t dt = \int 15^t dt = \frac{15^t}{ln15} + C;$$

Проверка:

$$(\frac{15^t}{ln15} + C)' = \frac{15^t}{ln15} ln15 = 15^t = 3^t 5^t;$$

4). При решении данного интеграла воспользуемся следующей подстановкой $t = 3 + 4e^x$, тогда $dt = 4e^x dx,\ e^x dx = \frac{dt}{4}$

$$\int \frac{e^x}{3 + 4e^x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} ln|t| + C = \frac{1}{4} ln|3 + 4e^x| + C;$$

Проверка:

$$(\frac{1}{4} ln|3 + 4e^x| + C)' = \frac{1}{4} \frac{4e^x}{3 + 4e^x} = \frac{e^x}{3 + 4e^x};$$

5). Используя формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, получим $u = lnx,\ du = \frac{1}{x}dx,\ \ dv = \frac{dx}{x^4},\ v = -\frac{1}{3x^3}$

$$\int \frac{lnx}{x^3} dx = -\frac{lnx}{3x^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{lnx}{3x^3} - \frac{1}{15x^5} + C;$$

Проверка:

$$(-\frac{lnx}{3x^3} - \frac{1}{15x^5} + C)' = -\frac{1}{3} \frac{\frac{1}{x}x^3 - 3x^2 lnx}{x^6} + \frac{1}{3x^4} = -\frac{1}{3x^4} + \frac{lnx}{x^4} + \frac{1}{3x^4} = \frac{lnx}{x^4};$$

6). При вычислении данного интеграла воспользуемся формулой двойного угла $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C;$$

Проверка:

$$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C)' = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} 6 \cos 6x = \frac{1-\cos 6x}{2} = sin^2 3x;$$

$$7) \int\limits_0^2 \frac{5-x}{9-x^2} dx = \int\limits_0^2 \frac{5}{9-x^2} dx - \int\limits_0^2 \frac{x}{9-x^2} dx = 5\frac{1}{6} ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\Bigg|_0^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{d(9-x^2)}{9-x^2} =$$

$$= \frac{5}{6} ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\Bigg|_0^2 + \frac{1}{2} ln\left|9-x^2\right|\Bigg|_0^2 = \frac{5}{6} ln5 - \frac{5}{6} ln1 + \frac{1}{2} ln5 - \frac{1}{2} ln9 = \frac{4}{3} ln5 - ln3.$$