УДК 517.972.5

ОБ УСЛОВИЯХ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ[1]

И.А.Колесникова

Кафедра математического анализа
Российский Университет Дружбы Народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия

Введение. При решении задач вариационными методами возникает необходимость построения функционалов, критические точки которых совпадают с решениями исходных уравнений. Исследование проблемы построения искомых функционалов начинается с проверки выполнения условий потенциальности соответствующих операторов. Для дифференциальных уравнений без отклонения аргументов имеются эффективные методы, позволяющие проверять потенциальность соответствующих операторов [5].

Отметим, что первыми вариационными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами занимались Эльсгольц Л.Э.[6], Каменский Г.А.[1]. Исследование существования решения обратной задачи вариационного исчисления для уравнений с отклоняющимися аргументами начаты в работах Савчина В.М.[4] и Попова А.М.[2],[3].

Пусть задано операторное уравнение

$$N(u) = 0, \qquad u \in D(N),$$

где $N : D(N) \subseteq U \to V$, U, V – линейные нормированные пространства над полем действительных чисел R.

Будем предполагать, что в каждой точке $u \in D(N)$ существует производная Гато N'_u так, что $\delta N(u,h) = N'_u h$.

Пусть на $V \times U$ задана некоторая билинейная форма $< .,. >$: $V \times U \to R$.

Как известно [5], оператор N называется потенциальным относительно заданной билинейной формы $< .,. >$, если существует функционал $F_N[u] : D(F_N) \equiv D(N) \to R$, такой, что $\delta F_N(u,h) =< N(u), h > \ \forall u \in D(N), \ \forall h \in D(N'_u)$.

В дальнейшем нам понадобится критерий потенциальности вида

$$< N'_u h, g > = < h, N'_u g > \ \forall u \in D(N), \ \forall h, g \in D(N'_u).$$

Постановка задачи. Условия потенциальности.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение в частных производных с отклоняющимися аргументами:

[1]*Работа выполнена при финансовой поддержке по программе "Университеты России"(Проект № УР.04.01.057)

$$N(u) \equiv f(x, u_\alpha^{(k)}(x, t+\lambda\tau)) = 0, \qquad k = \overline{0,l};\ |\alpha| = \overline{0,s};$$
$$\lambda = \overline{-1,1};\ \tau > 0, \tag{1}$$

где $(x,t) \in Q = \Omega \times (t_1, t_2)$; Ω – ограниченная область в R^m с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$; $t_2 - t_1 > 2\tau$; u – неизвестная функция из класса $C_{x,t}^{s,l}(\overline{Q_\tau}) = U$, $Q_\tau = \Omega \times (t_1 - \tau, t_2 + \tau)$;

$$u_\alpha^{(k)} = \frac{\partial^k \partial_\alpha u}{\partial t^k};\ \partial_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^m)^{\alpha_m}};\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in Z_+^m;\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i;$$

f – заданная достаточно гладкая функция.

Зададим область определения оператора N равенством

$$D(N) = \left\{ \begin{array}{c} u \in U : \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{1k}(x,t) \qquad (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_1 - \tau, t_1];\ k = \overline{0, l_0}), \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{2k}(x,t) \qquad (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_2, t_2 + \tau];\ k = \overline{0, l_0}), \\ \left(\frac{\partial^\nu u}{\partial n_x^\nu} \right) \Big|_{\Gamma_\tau} = \psi_\nu(x,t) \qquad (\nu = \overline{0, s_0}). \end{array} \right\}. \tag{2}$$

Здесь φ_{ik}, ψ_ν заданные функции; $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times (t_1 - \tau, t_2 + \tau)$; Числа l_0 и s_0 связаны соответственно с l и s. Если $l, s-$ четны, то $l_0 = \frac{l}{2} - 1$, $s_0 = \frac{s}{2} - 1$. При нечетном l, s полагаем $l_0 = \frac{l+1}{2} - 1$, $s_0 = \frac{s+1}{2} - 1$.

Зададим билинейную форму со сверткой вида

$$< v, g > = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} v(x,t) Bg(x,t) dx dt, \tag{3}$$

где $Bg(x,t) = g(x, t_2 - t)$.

Под решением задачи (**??**), (**??**) понимается функция $u \in C_{x,t}^{s,l}(\overline{Q}_\tau)$, удовлетворяющая уравнению (**??**) и краевым условиям (**??**).

Обозначим
$$D_\alpha = \frac{d^{|\alpha|}}{(dx^1)^{\alpha_1} ... (dx^m)^{\alpha_m}}; \tag{4}$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} ... \binom{\alpha_m}{\beta_m} = \prod_{i=1}^{m} \binom{\alpha_i}{\beta_i}, \qquad \text{если} \qquad \alpha_i \geq \beta_i, \\ 0, \qquad \text{если} \qquad \alpha_i < \beta_i, \end{cases} \tag{5}$$

где
$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{(\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!)} \equiv C_{\alpha_i}^{\beta_i}.$$

В дальнейшем по повторяющимся индексам сомножителей, расположенным на разных уровнях, подразумевается суммирование.

Используя введеные выше обозначения (**??**) - (**??**), можно доказать, что справедлива

Теорема. Для того, чтобы оператор (**??**) был потенциальным на множестве (**??**) относительно билинейной формы (**??**), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$(-1)^{|\alpha|+k+\nu} C_k^{\nu} \binom{\alpha}{\beta} B D_t^{k-\nu} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial (u_\alpha)^{(k)}(x, t+\lambda\tau)} \right) \Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} =$$

$$= \frac{\partial f}{(\partial u_\beta)^{(\nu)}(x, t-\lambda\tau)} \tag{6}$$

$$\forall (x,t) \in \Omega \times (t_1, t_2);\ \forall u \in D(N);\ |\beta| = \overline{0, s},\ \nu = \overline{0, l},$$

где $(f(x,t))|_{t\to t-\lambda\tau} = f(x, t-\lambda\tau)$; D_t^k - полная производная по t порядка k.

Пример. Рассмотрим оператор N уравнения с отклоняющимися аргументами вида

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \{-a^i \frac{\partial^2 u(x, t+\lambda\tau)}{(\partial x^i)^2} + k \frac{\partial u(x, t+\lambda\tau)}{\partial t}\} = 0 \tag{7}$$

$$\forall (x,t) \in Q = \Omega \times (0, T),$$

где $u = u(x,t)-$ неизвестная функция; $a^i = const \neq 0 \qquad (i = 1, 2)$,

$$k = const > 0; \qquad \Omega = \{x = (x^1, x^2) : ((x^1)^2 + (x^2)^2)^{\frac{1}{2}} \leq r,\ r > 0\}.$$

Зададим область определения данного оператора равенством

$$D(N) = \left\{ \begin{array}{c} u \in U = C^2(Q_\tau) : \\ u(x,t) = \varphi_1(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ t \in [-\tau, 0], \\ u(x,t) = \varphi_2(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ t \in [T, T+\tau] \\ u|_{\Gamma_\tau} = 0, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \end{array} \right\},$$

где $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$ $(i = 1, 2)$, $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times (-\tau, T+\tau)$, $Q_\tau = \Omega \times (-\tau, T+\tau)$.

Непосредственным вычислением можно убедится, что для заданного оператора (**??**) выполняются условия (**??**). Следовательно, оператор (**??**) является потенциальным.

Соответствующий функционал имеет вид

$$W_N[u] = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=-1}^{1} \int_0^T \int_\Omega [k u(x, t+\lambda\tau) \frac{\partial u(x, T-t)}{\partial t} -$$

$$-a^i \frac{\partial u(x, t+\lambda\tau)}{\partial x^i} \frac{\partial u(x, T-t)}{\partial x^i}] dx dt, \qquad u \in D(N).$$

Литература

[1]. *Каменский Г.А.* К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР 120, 4(1958). С.697-700.

[2]. *Попов А.М.* Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений // Диф. уравнения, 1998, Т.34, №3. С.422-424.

[3]. *Попов А.М.* Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Мат. заметки, 1998, Т.64, №3. С.437-442.

[4]. *Савчин В.М.* Условия потенциальности Гельмгольца для ДУЧП с отклоняющимися аргументами.// XXXI Научная конференция факультета физико-математических и естественных наук. Тезисы докладов.1995г. С.25.

[5]. *Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М., ВИНИТИ, 1992. Т.40.

[6]. *Эльсгольц Л.Э.* Периодические решения квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом// Труды III Всесоюзн. математ. съезда, 1956, Изд. АН СССР, 1959.

КОЛЕСНИКОВА ИРИНА АНАТОЛЬЕВНА
113208, Москва, Сумской пр-д, д.4, корп.4, кв.97
IKOLESNIKOVA@sci.pfu.edu.ru
тел.315-17-13(дом), 952-35-83(раб)
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
Кафедра математического анализа
Ассистент кафедры математического анализа

АНАТАЦИЯ

Получены необходимые и достаточные условия существования вариационных принципов для краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами.

ДОПОЛНЕНИЕ

Доказательство. Найдем производную Гато данного оператора

$$N'_u h = \left(\frac{d}{d\epsilon} N(u+\epsilon h)\right)\bigg|_{\epsilon=0} =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial f(x,t,u_\alpha^{(k)}(x,t-\lambda\tau))}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t-\lambda\tau)} h_\alpha^{(k)}(x,t-\lambda\tau).$$

Тогда используя формулы (4), (6) получаем

$$< N'_u h, g >=$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x,t,u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau))}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau)} h_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau) Bg(x,t)dxdt. \tag{8}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что допустимые вектор-функции h и g удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{\partial^k g}{\partial t^k}\right) = \left(\frac{\partial^k h}{\partial t^k}\right) = 0, \qquad k = \overline{0, l_0},$$

$$t \in [t_1-\tau, t_1],\ t \in [t_2, t_2+\tau]$$

$$\left(\frac{\partial^k g}{\partial n_x^\nu}\right)\bigg|_{\Gamma_\tau} = \left(\frac{\partial^k h}{\partial n_x^\nu}\right)\bigg|_{\Gamma_\tau} = 0, \qquad \nu = \overline{0, s_0}, \tag{9}$$

из равенства (8) находим

$$< N'_u h, g >=$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} D_t^k D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau)} Bg(x,t)\right) h(x,t+\lambda\tau)dxdt.$$

Сделаем замену переменных $t+\lambda\tau = t'$.

$$< N'_u h, g >=$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2+2\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} D_{t'}^k D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t')} Bg(x,t'-\tau)\right) h(x,t')dxdt' +$$

$$+ \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} D_{t'}^k D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t')} Bg(x,t')\right) h(x,t')dxdt' +$$

$$+ \int\limits_{t_1-2\tau}^{t_2} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} D_{t'}^k D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t')} Bg(x,t'+\tau)\right) h(x,t')dxdt'.$$

Заметим, что в силу области определения оператора N

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} h(x,t)dt = \int\limits_{t_2}^{t_2+\tau} h(x,t)dt = 0, \qquad \forall x \in \Omega,$$

$$\int\limits_{t_2+\tau}^{t_2+2\tau} Bg(x,t-\tau)dt = \int\limits_{t_1-2\tau}^{t_1-\tau} Bg(x,t+\tau)dt = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \Psi(x,t)dt + \int\limits_{t_1}^{t_2+2\tau} \Psi(x,t)dt - \int\limits_{t_2+\tau}^{t_2+2\tau} \Psi(x,t)dt = \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \Psi(x,t)dt, \qquad \forall x \in \Omega, \Psi(x,t) \in D(N),$$

$$-\int\limits_{t_1-2\tau}^{t_1-\tau} \Psi(x,t)dt + \int\limits_{t_1-2\tau}^{t_2} \Psi(x,t)dt + \int\limits_{t_2}^{t_2+\tau} \Psi(x,t)dt = \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \Psi(x,t)dt, \qquad \forall x \in \Omega, \Psi(x,t) \in D(N).$$

Следовательно,

$$< N'_u h, g >=$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} D_t^k D_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t)} Bg(x,t-\lambda\tau) \right) h(x,t)dxdt.$$

Применяя формулу Лейбница, отсюда получаем

$$< N_u^{'} h, g >= \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|+k} \sum_{\nu=0}^{l} \sum_{|\beta|=0}^{s} C_k^\nu \binom{\alpha}{\beta} \times$$

$$\times D_t^{k-\nu} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t)} \right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left(Bg_\beta(x,t-\lambda\tau) \right) h(x,t)dxdt. \tag{10}$$

Так как

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} v(x,t) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left(Bg_\beta(x,t-\lambda\tau) \right) h(x,t)dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} (-1)^\nu Bv(x,t) Bh(x,t) g_\beta^\nu(x,t-\lambda\tau)dxdt.$$

Равенство (10) может быть записано в виде

$$< N'_u h, g >= \sum_{\lambda=-1}^{1} \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{|\alpha|+k+\nu} \sum_{|\beta|=0}^{s} C_k^\nu \binom{\alpha}{\beta} \cdot$$

$$B[D_t^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t)}]g_\beta^\nu(x,t-\lambda\tau)Bh(x,t)dxdt. \tag{11}$$

С другой стороны имеем

$$< N'_u g,h >= \sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t)}g_\alpha^k(x,t+\lambda\tau)Bh(x,t)dxdt =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(k)}(x,t)}g_\beta^\nu(x,t+\lambda\tau)Bh(x,t)dxdt =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_2+\tau}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(k)}(x,t)}g_\beta^\nu(x,t-\lambda\tau)Bh(x,t)dxdt. \tag{12}$$

Используя (11), (12), получим

$$< N'_u h,g > - < N'_u g,h >= \sum_{\lambda=-1}^{1}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_2=\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\beta|=0}^{s}\Bigg[(-1)^{|\alpha|+k+\nu}C_k^\nu\binom{\alpha}{\beta}\cdot$$

$$BD_t^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t)}\right)\Bigg|_{t\to t+\lambda\tau} - \frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(k)}(x,t)}\Bigg]$$

$$g_\beta^\nu(x,t-\lambda\tau)Bh(x,t)dxdt \qquad \forall u\in D(N),\ \forall g,h\in D(N'_u).$$

В силу симметричности

$$< N'_u h,g >=< N'_u g,h > \qquad \forall u\in D(N), \qquad \forall g,h\in D(N'_u).$$

Отсюда заключаем, что условие

$$(-1)^{|\alpha|+k+\nu}C_k^\nu\binom{\alpha}{\beta}BD_t^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau)}\right)\Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_\beta^\nu(x,t-\lambda\tau)}$$

являются необходимыми и достаточными для потенциальности оператора (4) в области определения (5) относительно билинейной формы (6) ч.т.д.