Контрольная работа по высшей математике №1 1 курс

1. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11 \\ -4x - 1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение, фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x - 2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -4x_1 + 14x - 2 - 8x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 10x - 2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Даны последовательно вершины параллелограма $ABCD$

$$A(-2;5);\ B(2;7);\ C(-4;-3).$$

Найти координаты D и написать уравнения BD.

РЕШЕНИЕ:

1). Запишем в матричной форме

$$A \cdot x = B$$

$$A^{(-1)} \cdot A \cdot x = A^{(-1)} \cdot B$$

$$x = A^{(-1)} \cdot B,$$

где $A^{(-1)} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}$,

Найдем определитель матрицы A

$$detA = \begin{vmatrix} 1\,2\,-3 \\ -2\,6\,9 \\ -4\,-3\,8 \end{vmatrix},$$

используя "правило треугольника"

$$detA = 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot9\cdot4 - 2\cdot3\cdot3 - 3\cdot6\cdot4 + 2\cdot2\cdot8 + 3\cdot9\cdot1 = -55.$$

Найдем A_{ij} для $i,j=\overline{1,3}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 75, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 30,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 10,$$

В итоге получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{55}\begin{pmatrix} 75 & -7 & 36 \\ -20 & -4 & -3 \\ 30 & -5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2). Найдем ранг соответствующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & -1 & 5 \\ -4 & 14 & -8 & -2 \\ -1 & 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 26 & -12 & -10 \\ 0 & 26 & -12 & -10 \\ 0 & 26 & -12 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 26 & -12 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rgA = 2.$$

Пусть

$$x_1 = a_{11}x_3 + a_{12}x_4,$$

$$x_2 = a_{21}x_3 + a_{22}x_4,$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $x_3, \quad x_4$ - свободные, (x_1, x_2) - базис, (c_1, c_2) - фундаментальная система решений.

Положим $x_3 = b, \quad x_4 = d$, тогда общее решение $(a_{11}b + a_{12}d, a_{21}b + a_{22}d, b, d)$.

Ответ: фундаментальная система решений

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

общее решение $(a_{11}b + a_{12}d, a_{21}b + a_{22}d, b, d)$.

3). Найдем CD, т.к. $AB//CD$ составим уравнение прямой AB :

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-5}{7-5},$$

$$x + 2 = 2(y-5),$$

$$x - 2y + 12 = 0.$$

Следовательно прямая $CD : x - 2y + \tilde{D} = 0$, найдем $\tilde{D}$ т.$C \in CD \Longrightarrow -4 - 2(-3) + \tilde{D} = 0$. Отсюда $\tilde{D} = -2$, т.е.

$$CD: \quad x - 2y - 2 = 0.$$

Найдем AD, т.к. $BC//AD$ составим уравнение прямой BC :

$$\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-7}{-3-7},$$

$$10(x-2) = 6(y-7),$$

$$5x - 3y + 11 = 0.$$

Следовательно прямая $AD: 5x - 3y + \tilde{\tilde{D}} = 0$, найдем $\tilde{\tilde{D}}$ т. $A \in AD \Longrightarrow -10 - 15 + \tilde{\tilde{D}} = 0$. Отсюда $\tilde{\tilde{D}} = 25$, т.е.

$$AD: \quad 5x - 3y + 25 = 0.$$

Точка $D = DA \cap CD$

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 5x - 3y + 25 = 0 \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований получим $x = -8, y = -5, \quad D = (-8, -5)$.

Найдем уравнение BD

$$\frac{x-2}{-8-2} = \frac{y-7}{-5-7}.$$

Преобразуем данное равенство

$$BD: \quad 6x - 5y + 23 = 0$$

Ответ: $D = (-8; -5), \quad BD: \quad 6x - 5y + 23 = 0.$